## MASTER 1 ECONOMIE ET STATISTIQUE

**Mathematical Statistics / code : M1S114**

**Lundi 24 Juin 2013 ~ amphi MB1**

C. THOMAS-AIGNAN

↪ durée conseillée pour traiter **ce** sujet : 1 heure

↪ **ATTENTION** : le nom de la matière et son code doivent être **IMPERATIVEMENT** recopiés sur la copie d'examen

**Sans document – Without document.**

# 1 In english

**Exercise 1**

We consider the uniform discrete distribution on the integers from 1 to 4. We draw a sample of size 8 from this distribution and we get $4, 3, 4, 3, 1, 1, 1, 1$. Compute the following four characteristics : mean, median, centered moment of order 2 and first quartile, for the theoretical distribution and for the empirical distribution associated to this sample.

**Exercise 2**

Let $X_1, \cdots X_n$ be a sample from the Bernoulli distribution with parameter $\theta \in (0,1)$. Let $\bar{X}$ be the empirical mean of this sample. We consider the estimation of the parameter $\phi = \theta(1-\theta)$. Let $T = \bar{X} - \bar{X}^2$.

- compute $\mathbb{E}(\bar{X})$, $Var(\bar{X})$, $\mathbb{E}(\bar{X}^2)$
- for this question only we assume that $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. What is the maximum likelihood estimator of $\phi$? compute its bias.
- what is the Cramer Rao lower bound for an unbiased estimator of $\phi$?
- what is the asymptotic behavior of $T$?
- we take an a priori distribution on the parameter $\theta$ given by the density $f(\theta) = 3\theta(1-\theta)$ on the interval $(0,1)$. Compute the bayesian estimator of $\theta$ for quadratic loss.

**Annex.** You may use the following information. The density of the Beta distribution with parameters $a$ and $b$ is given for $u \in (0,1)$ by $f(u) = \frac{u^{a-1}(1-u)^{b-1}}{B(a,b)}$, where $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. The mean of this distribution is equal to $\frac{a}{a+b}$.

# 2 En français

**Exercice 1**

On considère la loi uniforme discrète sur les entiers de 1 à 4. On tire un échantillon de taille 8 de cette distribution et l'on obtient $4, 3, 4, 3, 1, 1, 1, 1$. Calculer les quatre caractéristiques suivantes : moyenne, médiane, moment centré d'ordre 2 et premier quartile, pour la distribution théorique et pour la distribution empirique associée à cet échantillon.

**Exercice 2**

Soient $X_1, \cdots X_n$ un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in (0,1)$. Soit $\bar{X}$ la moyenne empirique de cet échantillon. On considère l'estimation du paramètre $\phi = \theta(1-\theta)$. Soit $T = \bar{X} - \bar{X}^2$.

- calculer $\mathbb{E}(\bar{X})$, $Var(\bar{X})$, $\mathbb{E}(\bar{X}^2)$
- dans cette question seulement on suppose que $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\phi$? calculer son biais.
- quel est la borne de Cramer Rao pour un estimateur sans biais de $\phi$?
- quel est le comportement asymptotique de $T$?
- on prends comme loi a priori sur le paramètre $\theta$ la loi de densité $f(\theta) = 3\theta(1-\theta)$ sur l'intervalle $(0,1)$. Calculer l'estimateur bayésien de $\theta$ pour la perte quadratique.

**Annexe.** On pourra utiliser l' information suivante. La densité de la loi Beta de paramètres $a$ et $b$ est donnée pour $u \in (0,1)$ par $f(u) = \frac{u^{a-1}(1-u)^{b-1}}{B(a,b)}$, où $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. La moyenne de cette loi est égale à $\frac{a}{a+b}$.

UNIVERSITE TOULOUSE 1 CAPITOLE

## MASTER 1 ECONOMIE ET STATISTIQUE

**Mathematical Statistics / code : M1S114**

**Lundi 24 Juin 2013 ~ amphi MB1**

C. THOMAS-AIGNAN

↪ durée conseillée pour traiter **ce** sujet : 1 heure
↪ **ATTENTION** : le nom de la matière et son code doivent être **IMPERATIVEMENT** recopiés sur la copie d'examen
**Sans document – Without document.**

# 1 In english

**Exercise 1**
We consider the uniform discrete distribution on the integers from 1 to 4. We draw a sample of size 8 from this distribution and we get $4, 3, 4, 3, 1, 1, 1, 1$. Compute the following four characteristics : mean, median, centered moment of order 2 and first quartile, for the theoretical distribution and for the empirical distribution associated to this sample.

**Exercise 2**
Let $X_1, \cdots X_n$ be a sample from the Bernoulli distribution with parameter $\theta \in (0,1)$. Let $\bar{X}$ be the empirical mean of this sample. We consider the estimation of the parameter $\phi = \theta(1-\theta)$. Let $T = \bar{X} - \bar{X}^2$.

- compute $\mathbb{E}(\bar{X})$, $Var(\bar{X})$, $\mathbb{E}(\bar{X}^2)$
- for this question only we assume that $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. What is the maximum likelihood estimator of $\phi$? compute its bias.
- what is the Cramer Rao lower bound for an unbiased estimator of $\phi$?
- what is the asymptotic behavior of $T$?
- we take an a priori distribution on the parameter $\theta$ given by the density $f(\theta) = 3\theta(1-\theta)$ on the interval $(0,1)$. Compute the bayesian estimator of $\theta$ for quadratic loss.

**Annex.** You may use the following information. The density of the Beta distribution with parameters $a$ and $b$ is given for $u \in (0,1)$ by $f(u) = \frac{u^{a-1}(1-u)^{b-1}}{B(a,b)}$, where $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. The mean of this distribution is equal to $\frac{a}{a+b}$.

# 2 En français

**Exercice 1**
On considère la loi uniforme discrète sur les entiers de 1 à 4. On tire un échantillon de taille 8 de cette distribution et l'on obtient $4, 3, 4, 3, 1, 1, 1, 1$. Calculer les quatre caractéristiques suivantes : moyenne, médiane, moment centré d'ordre 2 et premier quartile, pour la distribution théorique et pour la distribution empirique associée à cet échantillon.

**Exercice 2**
Soient $X_1, \cdots X_n$ un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in (0,1)$. Soit $\bar{X}$ la moyenne empirique de cet échantillon. On considère l'estimation du paramètre $\phi = \theta(1-\theta)$. Soit $T = \bar{X} - \bar{X}^2$.

- calculer $\mathbb{E}(\bar{X})$, $Var(\bar{X})$, $\mathbb{E}(\bar{X}^2)$
- dans cette question seulement on suppose que $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\phi$? calculer son biais.
- quel est la borne de Cramer Rao pour un estimateur sans biais de $\phi$?
- quel est le comportement asymptotique de $T$?
- on prends comme loi a priori sur le paramètre $\theta$ la loi de densité $f(\theta) = 3\theta(1-\theta)$ sur l'intervalle $(0,1)$. Calculer l'estimateur bayésien de $\theta$ pour la perte quadratique.

**Annexe.** On pourra utiliser l' information suivante. La densité de la loi Beta de paramètres $a$ et $b$ est donnée pour $u \in (0,1)$ par $f(u) = \frac{u^{a-1}(1-u)^{b-1}}{B(a,b)}$, où $B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$. La moyenne de cette loi est égale à $\frac{a}{a+b}$.