UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

MASTER 1 in ECONOMICS
MASTER 1 ECONOMIE ET DROIT
MASTER 1 ECONOMIE ET STATISTIQUE

Econometrics / code : M1S13

Lundi 24 Juin 2013 ~ amphi MB2

C. BONTEMPS
P. LAVERGNE

➥ durée conseillée pour traiter **ce** sujet : 1 heure
➥ **ATTENTION** : le nom de la matière et son code doivent être **IMPERATIVEMENT** recopiés sur la copie d'examen

EXERCISE 1. Let $Y_1, \ldots, Y_n$ be a random sample from Y, which is distributed as a log-normal variable, that is $\log Y$ is normal with mean μ et variance σ^2. The density of Y is given by

$$f(y;\mu,\sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} y^{-1} \exp\left(-\frac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Write the likelihood of the sample.
2. Write the first order conditions (F.O.C.) of the maximization procedure and deduce the maximum likelihood estimators $\widehat{\mu}$ and $\widehat{\sigma}^2$ for μ and σ^2.
3. Compute the matrix of second-order derivatives

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log f(y;\mu,\sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2}\log f(y;\mu,\sigma^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2}\log f(y;\mu,\sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\log f(y;\mu,\sigma^2) \end{bmatrix}.$$

   From the previous result, determine the information matrix.
4. What is the joint asymptotic distribution of the maximum likelihood estimators? *(A statement is sufficient for this question, no proof is expected)*

EXERCISE 2. We consider a Poisson counting model for counts (denoted N) of automobile accidents in a given year. We have a collection of 7,483 observations for the year 2007 from an insurance company. The covariates are **Female,** 1 for Female, 0 for Male ; **Age** grouped in three categories "18-35", "36-55", "56 and over" ; **NCD** No Claims Discount based on the previous accident record of the policy holder (from 0% to 50%). The higher the discount, the better is the prior accident record. This variable is grouped in four categories 0%, 10%, 20%-40%, 50%. In a Poisson model, $P(N=j|X=x_i) = \frac{\mu_i^j}{j!}\exp(-\mu_i)$, where $\mu_i = \exp(x_i^\top\beta)$. We recall that $E(N|X=x_i)=\mu_i$ for a Poisson model. Here $x = (1, F, "18-35", "36-55", "NCD0", "NCD10", "NCD50")^\top$, the omitted reference levels being "56 and over" for the age and "NCD 20-40" for no claims discount. The MLE estimation of β is given in the following table. The overall log-likelihood for this model (i.e. the sum of all individual log-likelihood contributions) is $L(\hat\beta) = -1776.7$.

Variable	Parameter Estimate	Std. err.	Variable	Parameter Estimate	Std. err.
Intercept	-3.31	0.51	No Claims Discount		
Female	-0.18	0.15	0	0.73	0.18
Age Category			10	0.53	0.19
"18-35"	0.62	0.28	50	-0.10	0.20
"36-55"	-0.06	0.05			

Table 1: Parameter Estimates from a Fitted Poisson Model

1. Write the log-likelihood of **one** observation corresponding to N_i accidents with covariates x_i.
2. How do you interpret the estimated value for the Age categories ?
3. We want to test the assumption $\beta_{Female} = 0$ against $\beta_{Female} > 0$. Derive the test statistic and its asymptotic distribution under both the null and the alternative. Conclude.
4. Calculate the estimated probabilities for a Man, 32 years, NCD=0 to have respectively zero accident in a given year, one accident in a given year. Calculate for the same person, his expected number of accidents.
5. We add a covariate X_8 which is equal to one when the person uses his/her car for his job and zero otherwise. The estimated value is equal to -2.3. The log-likelihood for this new model is equal to -1775.1. Is this new variable significant (explain your result) ?

Econometrics Master 1, 2012
Examen final — 1h00

EXERCISE 1. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ un échantillon aléatoire d'une variable Y, qui est distribuée suivant une loi log-normale, c'est-à-dire que $\log Y$ est normale de moyenne μ et de variance σ^2. La densité de Y est

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} y^{-1} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Écrivez la vraisemblance de l'échantillon.
2. Écrivez les équations de vraisemblance (conditions du premier ordre) et en déduire quels sont les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}^2$ pour μ et σ^2.
3. Calculez la matrice des dérivées secondes

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \log f(y; \mu, \sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2} \log f(y; \mu, \sigma^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma^2} \log f(y; \mu, \sigma^2) & \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} \log f(y; \mu, \sigma^2) \end{bmatrix}.$$

   En déduire la matrice d'information.
4. Donnez la distribution asymptotique jointe des estimateurs du maximum de vraisemblance. *(Vous n'avez pas à fournir de preuve pour cette question)*

EXERCISE 2. On considère un modèle de Poisson pour modéliser le nombre d'accidents de voiture N pour une année donnée. L'échantillon est composé de 7 483 observations pour l'année 2007

Les variables explicatives sont **Femme**, 1 pour une femme, 0 pour un homme ; **Age** regroupé en trois catégories "18-35", "36-55", "56 et +" ; **Bonus** qui représente le bonus de l'assurance et qui est fonction de l'historique (de 0% à 50%). Plus le bonus est grand, meilleur est l'historique du conducteur. La variable est regroupée en 4 catégories 0%, 10%, 20%-40%, 50%. Pour un modèle de Poisson on a $P(N = j|X = x_i) = \frac{\mu_i^j}{j!}\exp(-\mu_i)$, où $\mu_i = \exp(x_i'\beta)$. On rappelle que $E(N|X = x_i) = \mu_i$ pour ce modèle. Dans notre cas $x = (1, F, "18-35", "36-55", "Bonus0", "Bonus10", "Bonus50")^\top$, la catégorie de référence étant "56 a et +" pour l'âge et "Bonus 20-40" pour la variable de bonus. L'estimation du vecteur β par maximum de vraisemblance est donnée dans la Table jointe. La log-vraisemblance totale de l'échantillon en le maximum (i.e. la somme de toutes les log-vraisemblances individuelles) est égale à $L(\hat{\beta}) = -1776.7$.

Variable	Paramètre Estimée	Écart type	Variable	Paramètre Estimée	Écart type
Constante	-3,31	0,51	Bonus		
Femme	-0,18	0,15	0	0,73	0,18
Age			10	0,53	0,19
"18-35"	0,62	0,28	50	-0,10	0,20
"36-55"	-0,06	0,05			

Table 2: Estimation d'un modèle de Poisson par MV

1. Écrire la log-vraisemblance d'une seule observation pour laquelle le nombre d'accidents est N_i et pour lesquelles les variables explicatives sont x_i.
2. Comment interprètez vous les valeurs estimées pour la catégorie Age ?
3. On veut tester l'hypothèse $\beta_{Femme} = 0$ contre $\beta_{Femme} > 0$. Calculer la statistique de test ainsi que sa distribution asymptotique sous la nulle et sous l'alternative. Conclure.

4. Calculer les probabilités estimées d'avoir respectivement zéro accident dans l'année, un accident dans l'année pour un homme de 32 ans avec un bonus de 0%. Calculer pour cette même personne son nombre attendu d'accidents.

5. On rajoute une variable explicative supplémentaire dans le modèle, X_8, égale à 1 quand la personne utilise sa voiture pour son travail et zéro sinon. La valeur estimée du coefficient correspondant est égale à -2,3. La log-vraisemblance totale est maintenant égale à -1775,1. Est-ce que la variable X_8 est significative (on expliquera la procédure) ?